

УДК 533.6.011.6:614.628

А.Г. Виноградов, канд. фіз.-мат.наук, доц.,
Академія пожежної безпеки ім. Героїв Чорнобиля, м. Черкаси, Україна

ВРАХУВАННЯ АЕРОДИНАМІЧНОГО КОЕФІЦІЄНТА ПРИ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ РУХУ КРАПЕЛЬ ВОДИ В ПОВІТРІ

Представлена одномерная математическая модель движения сферической капли воды в воздушной среде. Рассмотрены случаи постоянного аэродинамического коэффициента и его экспериментальной зависимости от числа Рейнольдса, заданной с помощью аппроксимирующей функции. На основе полученных расчетных формул выполнены сравнительные численные расчеты и построены графические зависимости для обоих случаев.

The one-dimensional mathematical model of movement of a spherical drop of water in the air environment is presented. Cases of constant aerodynamic factor and its experimental dependence on Reynolds's number, set by means of approximating function are considered. On the basis of the received calculation formulas comparative numerical calculations are executed and graphic dependences for both cases are constructed.

Вступ.

При математичному моделюванні розпиленних водяних струменів, які використовуються для гасіння пожеж та теплового екранування, необхідно виконувати розрахунки траєкторій крапель води та інших параметрів їх руху. Оскільки краплі рухаються в повітряному середовищі, одним із головних чинників, що визначає стан їх руху, є сила опору з боку повітря. Вплив цієї сили на траєкторні параметри крапель зростає при зменшенні їх розміру, і для найбільш дрібних крапель (тонкорозпилені водяні струмені) він є домінуючим.

У більшості випадків при математичному моделюванні краплі вважають сферичними тілами. Із експериментальних досліджень (див, наприклад, [1, 2]) відомо, що коефіцієнт опору (аеродинамічний коефіцієнт) для тіл сферичної форми має складну залежність від числа Рейнольдса. Це ускладнює задачу теоретичного аналізу руху крапель у повітрі. Тому в багатьох випадках використовують найбільш просту теоретичну модель сталого аеродинамічного коефіцієнта, надаючи йому значення 0,5 для всіх значень числа Рейнольдса (див, наприклад, [3-5]). Ця модель добре погоджується з експериментальними даними для відносно великих значень числа Рейнольдса (понад 500). Але для малих чисел Рейнольдса значення аеродинамічного коефіцієнта є значно більшим, і це необхідно враховувати під час теоретичних розрахунків.

Дослідження, що виконується в даній роботі, повинно дати відповідь на питання, наскільки виправданим є застосування моделі сталого аеродинамічного коефіцієнта при розрахунках траєкторних параметрів крапель розпиленних водяних струменів і наскільки сильно впливає на параметри руху краплі врахування реальної залежності аеродинамічного коефіцієнта від числа Рейнольдса.

Із цією метою в даній роботі поставлена задача виконати два альтернативні розрахунки залежностей швидкості краплі від просторової координати для наступних теоретичних моделей: 1) модель сталого аеродинамічного коефіцієнта; 2) врахування реальної залежності аеродинамічного коефіцієнта від числа Рейнольдса за допомогою відповідної функції апроксимації. Порівняння результатів цих розрахунків допоможе правильно зробити висновок щодо доцільності застосування моделі сталого аеродинамічного коефіцієнта в тих чи інших випадках.

Математичне моделювання.

В даній роботі для спрощення геометрії задачі не враховується дія гравітаційних сил, внаслідок чого траєкторія краплі є прямою лінією. Будемо вважати, що напрямок руху краплі співпадає з напрямком осі y , а початкова швидкість краплі (при $y = 0$) дорівнює v_0 .

Спочатку розглянемо наближення сталого аеродинамічного коефіцієнта C (для сферичної краплі візьмемо $C = 0,5$).

Для визначення залежності швидкості краплі v від координати y напишемо рівняння руху краплі:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -R, \quad (1)$$

де сила опору повітря:

$$R = C \cdot p \cdot S = C \cdot \frac{\rho_n \cdot v^2}{2} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \quad (2)$$

p – аеродинамічний тиск, S – площа міделевого перерізу краплі, ρ_n – густина повітря, ρ_e – густина води, d – діаметр краплі. Маса краплі в (1):

$$m = \rho_e \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{6}. \quad (3)$$

Після підстановки (2) і (3) в (1) отримаємо:

$$\rho_e \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{6} \cdot \frac{dv}{dt} = -C \cdot \frac{\rho_n \cdot v^2}{2} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

або

$$\frac{dv}{v} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\rho_n \cdot C}{\rho_e \cdot d} \cdot v \cdot dt.$$

Перейдемо від залежності від часу до залежності від координати за допомогою співвідношення:

$$v \cdot dt = dy \quad (4)$$

Проінтегруємо від початкової до довільної точки траєкторії з координатою y , якій відповідає певна швидкість краплі v :

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\rho_n \cdot C}{\rho_e \cdot d} \cdot \int_0^y dy$$

Після інтегрування та перетворень знайдемо для поточної швидкості краплі в нерухомому повітрі:

$$v = v_0 \cdot e^{-\frac{3}{4} \cdot \frac{\rho_n \cdot C}{\rho_e \cdot d} \cdot y}. \quad (5)$$

Наступний розрахунок необхідно виконати для реальної залежності аеродинамічного коефіцієнта від числа Рейнольдса. Із цією метою розглянемо більш детально цю залежність та обчислимо типові значення числа Рейнольдса для об'єкту дослідження (крапель із розпиливих водяних струменів, які використовуються під час гасіння пожеж). Число Рейнольдса визначається наступною формулою:

$$Re = \frac{\rho_n \cdot v \cdot d}{\mu}, \quad (6)$$

де μ – динамічна в'язкість повітря.

При атмосферному тиску і при температурі 30–50°C для повітря $\mu \approx 20$ мкПа·с, $\rho_n \approx 1,2$ кг/м³. В результаті розрахунку за формулою (6) отримаємо: для $d = 1$ мм $Re \approx 60 \cdot v$; для $d = 0,1$ мм $Re \approx 6 \cdot v$. Отже, при початковій швидкості $v_0 = 30$ м/с для початкової ділянки траєкторії $Re \approx 1800$ (при $d = 1$ мм) і $Re \approx 180$ (при $d = 0,1$ мм). Для середини і кінця траєкторії швидкість краплі внаслідок її гальмування є значно меншою, а тому й число Re є меншим від вказаних значень.

Згідно з даними експериментальних досліджень [1], отримані наступні значення аеродинамічного коефіцієнта сферичної частинки в залежності від числа Рейнольдса (табл. 1).

Таблиця 1

Залежність аеродинамічного коефіцієнта сферичної частинки від числа Рейнольдса

Re	C	Re	C	Re	C	Re	C
0,05	480	1	26,5	20	2,55	500	0,55
0,1	240	2	14,4	50	1,5	1000	0,46
0,2	120	5	6,9	100	1,07	2000	0,42
0,5	49,5	10	4,1	200	0,77	5000	0,385

Графічно ці значення представлені на рис. 1 (крапки). Згідно з [1], аналіз даної залежності у більш широкому діапазоні чисел Рейнольдса дозволяє приблизно розбити її на 3 характерні ділянки:

- 1) $Re > 500$, де $C \approx 0,44$ і приблизно сталий (закон Ньютона);
- 2) проміжний діапазон ($0,2 < Re < 500$), в якому наявна складна функціональна залежність C від Re ;
- 3) $Re < 0,2$, де справедливим є закон Стокса: $C = 24/Re$.

Згідно з наведеними вище оцінками щодо величини числа Рейнольдса для крапель розпиливих струменів, його типові значення для більшої частини траєкторій крапель (враховуючи їх гальмування) відповідають проміжному діапазону ($0,2 < Re < 500$), який є найбільш складним для аналізу.

Існує велика кількість запропонованих різними дослідниками функцій апроксимації для емпіричної залежності $C(Re)$, які відповідають цій залежності для різних діапазонів чисел Рейнольдса [1, 2]. Однією із апроксимацій для проміжного діапазону чисел Рейнольдса є наступна:

$$C = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt[3]{Re}}. \quad (7)$$

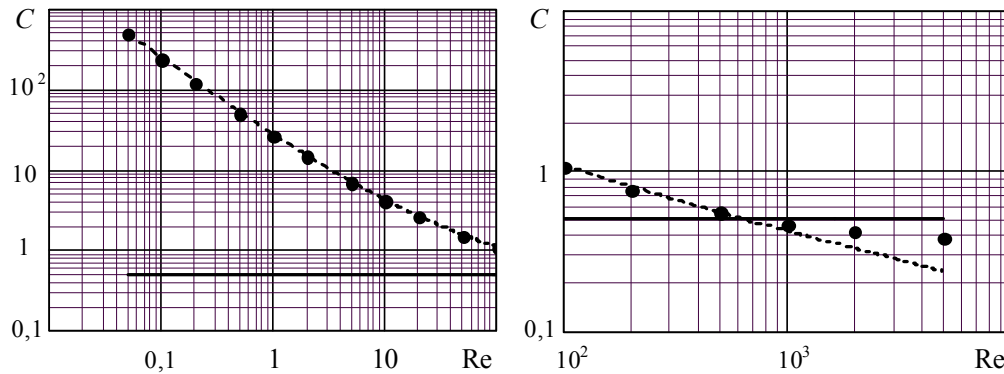


Рис. 1. Залежність $C(Re)$: крапки – експеримент (табл. 1), суцільна лінія – $C = 0,5$; пунктир – апроксимація (7). Масштаб осей логарифмічний

Для перевірки її відповідності експериментальним даним за допомогою пакету MathCAD за формулою (7) побудований графік (пунктир), представлений разом із експериментальними точками на рис. 1. Згідно з розрахунками, для всіх значень $Re < 1000$ отримане майже точне співпадіння експериментальних і розрахункових значень коефіцієнта C . Для $Re < 2000$ відхилення не перевищує 20%, і лише для $Re > 2000$ воно суттєво зростає.

Таким чином, функція (7) може бути застосована для теоретичного аналізу руху крапель пожежних розпиленних струменів.

Представимо функцію (7) через швидкість краплі, використовуючи вираз (6):

$$C = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt[3]{Re}} = \frac{24 \cdot \mu}{\rho_n \cdot d \cdot v} + \frac{4 \cdot \sqrt[3]{\mu}}{\sqrt[3]{\rho_n \cdot d \cdot v}}.$$

В цьому випадку сила опору повітря (2):

$$R = \left(\frac{24 \cdot \mu}{\rho_n \cdot d \cdot v} + \frac{4 \cdot \sqrt[3]{\mu}}{\sqrt[3]{\rho_n \cdot d \cdot v}} \right) \cdot \frac{\rho_n \cdot v^2}{2} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \quad (8)$$

і рівняння руху краплі (1) набуде вигляду:

$$\rho_g \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{6} \cdot \frac{dv}{dt} = - \left(\frac{24 \cdot \mu}{\rho_n \cdot d \cdot v} + \frac{4 \cdot \sqrt[3]{\mu}}{\sqrt[3]{\rho_n \cdot d \cdot v}} \right) \cdot \frac{\rho_n \cdot v^2}{2} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}.$$

Після перетворень отримаємо:

$$\frac{dv}{dt} = - \left[1 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{(\rho_n \cdot d \cdot v)}{\mu} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot \frac{18 \cdot \mu \cdot v}{\rho_g \cdot d^2}. \quad (9)$$

Для більш компактної форми запису даного рівняння введемо умовні позначення для сталих коефіцієнтів:

$$\gamma = \frac{18 \cdot \mu}{\rho_g \cdot d^2}, \quad (10)$$

$$\delta = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{(\rho_n \cdot d)}{\mu} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (11)$$

Перейдемо в рівнянні (9) від залежності від часу до залежності від координати за допомогою співвідношення (4) і проінтегруємо його, використовуючи позначення (10) і (11):

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{1 + \delta \cdot v^{\frac{2}{3}}} = -\gamma \cdot \int_0^y dy.$$

Звідси знайдемо залежність швидкості від координати у вигляді оберненої функції:

$$y(v) = \frac{1}{\gamma} \cdot \int_v^{v_0} \frac{dv}{1 + \delta \cdot v^3} \quad (12)$$

Порівняємо її зі знайденою вище формулою (5) для моделі сталого аеродинамічного коефіцієнта. Із цієї метою виконаємо чисельні розрахунки і побудуємо графіки залежностей швидкості краплі від її координати для розглянутих двох математичних моделей її руху при однакових початкових умовах. На рис. 2 представлені відповідні графічні залежності, побудовані за допомогою пакету MathCAD для двох моделей та для двох діаметрів крапель при початковій швидкості краплі $v_0 = 30$ м/с.

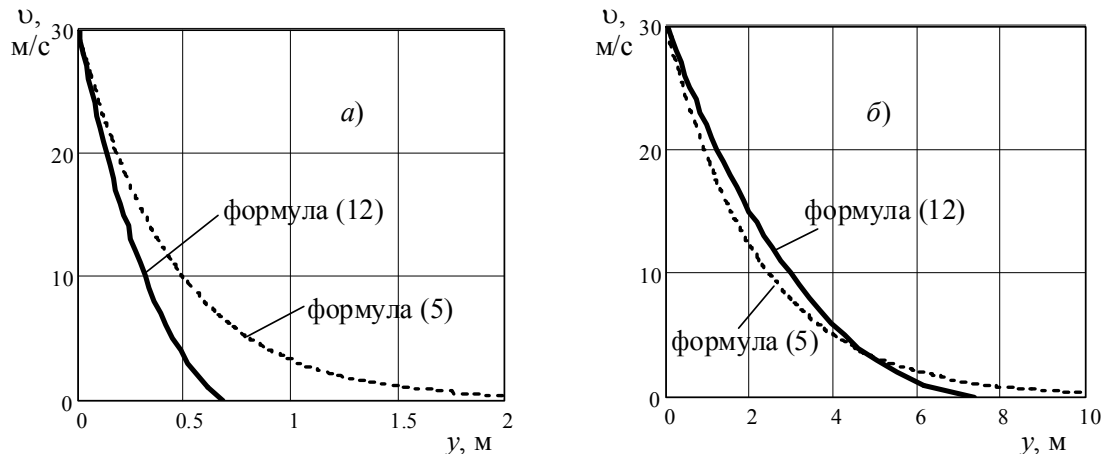


Рис. 2. Залежності швидкості краплі від координати для різних моделей аеродинамічного коефіцієнта для

діаметрів крапель: а) $d=0,2$ мм; б) $d=1$ мм ——— $C = 0,5$; — $C = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt[3]{Re}}$

Представлені графіки дозволяють зробити висновок щодо суттєвої розбіжності результатів, отриманих за різними математичними моделями. Різниця між ними полягає в наступних характерних рисах:

- 1) довжина траєкторій крапель, що відповідають формулі (5), є необмеженою, на відміну від траєкторій за формулою (12), довжина яких є принципово обмеженою і залежить від діаметра крапель (зростає при збільшенні діаметра);
- 2) гальмування крапель при малих значеннях швидкості є значно більш ефективним для моделі за формулою (12), що можна пояснити значним зростанням аеродинамічного коефіцієнта (і сили опору повітря) зі зменшенням числа Рейнольдса за цією моделлю (див. рис. 1);
- 3) зі зменшенням діаметра крапель розбіжність між двома математичними моделями зростає.

Висновки.

Виконані два альтернативних розрахунки залежностей швидкості краплі від просторової координати для наступних математичних моделей: 1) модель сталого аеродинамічного коефіцієнта; 2) врахування реальної залежності аеродинамічного коефіцієнта від числа Рейнольдса за допомогою функції апроксимації. За отриманими в роботі розрахунковими формулами за допомогою пакету MathCAD побудовані відповідні графіки для двох значень діаметра крапель. Їх порівняння дозволило встановити суттєву відмінність результатів розрахунків, виконаних із застосуванням вказаних вище двох моделей. Ця відмінність зростає при зменшенні діаметра крапель та при зменшенні швидкостей їх руху. Таким чином, при застосуванні моделі сталого аеродинамічного коефіцієнта необхідно враховувати вказані обмеження на параметри крапель.

В наступних роботах для визначення впливу виявлених ефектів на розрахункові траєкторії крапель розпиленних водяних струменів необхідно продовжити наведені дослідження і виконати розрахунки залежностей координат і швидкостей крапель для вказаних вище двох моделей із урахуванням гравітаційного поля.

Список літератури.

1. Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. – М.: Мир, 1975. – 378 с.
2. Каминер А.А., Яхно О.М. Гидромеханика в инженерной практике. – К.: Техніка, 1987. – 175 с.
3. Севриков В.В. Автономная автоматическая противопожарная защита промышленных сооружений. – Киев – Донецк: Вища школа, 1979. – 188 с.
4. Виноградов А.Г. Розрахунки траєкторних параметрів крапель водяної завеси у вертикальній площині // Вестник Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт», сер. Машиностроение. – 2008. – №53. – с. 84-88.
5. Виноградов А.Г. Теоретический анализ пространственного распределения концентрации капель водяной завесы // Пожаровзрывобезопасность. – 2010. – т. 19. – №1 – с. 45-49.